

PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}(\lfloor x-2 \rfloor) - \sqrt{\lfloor |x-1| - 3 \rfloor}}} + \log_{\lfloor x-2 \rfloor} |x|$$

1) Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \operatorname{Sgn}\left(\frac{x-5}{|x|-2}\right) + 2x \left\| \frac{x}{4} \right\| \quad \text{Donde } \left| \frac{x^2}{4} - 2 \right| \leq 2$$

$$g(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & x \in [0, 2) \\ \sqrt{x^2 - 4} & x \in [2, 6) \end{cases}$$

Hallar  $(f+g)_{(x)}$ , trazar su gráfica indicando su rango.

2) Dadas las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ \sqrt{x^2+16} & 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2}{x^2-4} & x > 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2+10x+21 & x \in [\sqrt{3}, 2] \\ \frac{|x-2|-1}{|x+3|} & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Si se cumple que  $f^* = \operatorname{hog}$ , determinar si existe la función  $h$ . Justificar procedimiento.

PREGUNTA 2

Dada las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} |x-6| & x < -2 \\ \lfloor 2^{x-1} \rfloor & x \in (-1; 3] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x-1 & x \in (-2; 2) \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{2x-6}{x+4}\right) & x \in (-\infty; -2] \cup [2; \infty) \end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de la función  $k = f + g$

PREGUNTA 3

Dada las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \in [-5; -1] \\ \frac{2(x+1)}{x-1} & x \in (0; 1) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x^2-16) & x \leq 0 \\ \log_3(2^x-1) & x > 0 \end{cases}$$

Halle (si existe) el rango de  $\operatorname{fog}$

3) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(|x+10|+|x+5|)}{x} & -10 \leq x \leq -5 \\ \frac{x^2-2x+5}{4} & -5 < x \leq 1 \\ \frac{1}{1-\sqrt{8+2x-x^2}} & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Determinar si  $f$  es inyectiva. Si no lo es, restringir el dominio, lo menos posible, de modo que sea inyectiva. Luego, halle  $f^*$ .

1. Indique y justifique la veracidad (V) o falsedad (F) de cada una de las siguientes afirmaciones:

- a) Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cosh^2(3x) + \sinh^2(3x) = 1$  (1.5 pts)
- b) Si  $f(x) = \ln(x^2+x-1)$ , entonces  $\operatorname{dom}(f) = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ . (1pto)
- c) Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x)) = -\operatorname{sgn}(x)$ . (1pto)
- d) El inverso de  $f(x) = 3^x$  es  $g(x) = \log_3 x$ . (1.5 pts)

Dom:  $0+\infty$   
Ran:  $\mathbb{R}$

Falso  $\cosh^2 3x - \sinh^2 3x = 1$   
 $x^2+x-1 > 0 \quad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  Falso  
Falso  
verdadero Para  $f(x)$  Dom:  $\mathbb{R}$   
Ran:  $(-\infty, \infty)$

2. Dados  $(a, b)$  y  $(c, d)$  intervalos abiertos, con  $b \leq c$ , y las funciones estrictamente crecientes  $f_1: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f_2: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ . Considere la función  $f: (a, b) \cup (c, d) \rightarrow \exp(\operatorname{Ran}(f_1)) \cup \operatorname{Ran}(f_2)$  definida como:

$$f(x) = \begin{cases} (\exp \circ f_1)(x), & \text{Si } x \in (a, b), \\ f_2(x) & \text{Si } x \in (c, d). \end{cases}$$

Muestre la siguiente proposición:  $f$  es monótona si y solo si para todo  $z_1, z_2$  tales que  $z_1 \in \exp(\operatorname{Ran}(f_1))$  y  $z_2 \in \operatorname{Ran}(f_2)$ , se cumple que  $z_1 \leq z_2$ . (5pts)

$f$  es monótona ----  
 $\forall z_1, z_2 / z_1 \in \exp(\operatorname{Ran}(f_1)), z_2 \in \operatorname{Ran}(f_2), z_1 \leq z_2$

3. a) Sean  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función impar y  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función par, que satisfacen la siguiente ecuación:

$$x^{14}f(x) - xf(x^{13}) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

calcule  $f^2(x) + g^2(x)$ .

$x^{14}f(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} + g(x)$   
Par

b) Sean  $a, b > 0$ ,  $\frac{a}{b} = p \in \mathbb{N}$ , y  $f$  una función tal que

$$f(x) = \left( (a-b) \cos x + b \cos\left(\frac{a-b}{b}x\right) \right) r(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

donde  $r$  es una función periódica de periodo  $\frac{n}{m}\pi$ , para  $n, m \in \mathbb{N}$  primos entre si. Si  $T_p$  es el periodo de  $f$  y  $T_r$  el periodo de  $r$ , entonces pruebe que

$$E_p = \frac{T_p}{T_r}, p \geq 1.$$

Aquí

$$E_p = \begin{cases} 2m, & p > 1 \\ 1, & p = 1 \end{cases}$$

(5pts)



# PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}([x-2])} - \sqrt{[|x-1|-3]}} + \log_{[x-2]}|x|$$

Solución:

$$[|x-1|-3] \geq 0$$

$$|x-1|-3 \geq 0 \Rightarrow |x-1| \geq 3$$

$$x \geq 4$$

$$x \leq -2$$

$$\operatorname{sgn}([x-2]) - \sqrt{[|x-1|-3]} > 0$$

$$0 < \sqrt{[|x-1|-3]} < \operatorname{sgn}([x-2])$$

$$\operatorname{sgn}([x-2]) \neq 0$$

$$\text{luego } \operatorname{sgn}([x-2]) = 1$$

$$0 < \sqrt{[|x-1|-3]} < 1 \Rightarrow 0 < [|x-1|-3] < 1$$

$$[x-2] > 0$$

$$\Rightarrow [|x-1|-3] = 0, \text{ concluimos } x \geq 4$$

$$\Rightarrow [x-1-3] = 0 \Rightarrow$$

$$0 \leq x-4 < 1$$

$$4 \leq x < 5$$

Nota logaritmo  
 $[x-2] > 0$

$$x-2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 3$$

$$[x-2] \neq 1 \text{ Supongamos } 1 < x-2 < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$

## PREGUNTA 1

Calcule el dominio y grafique la función:

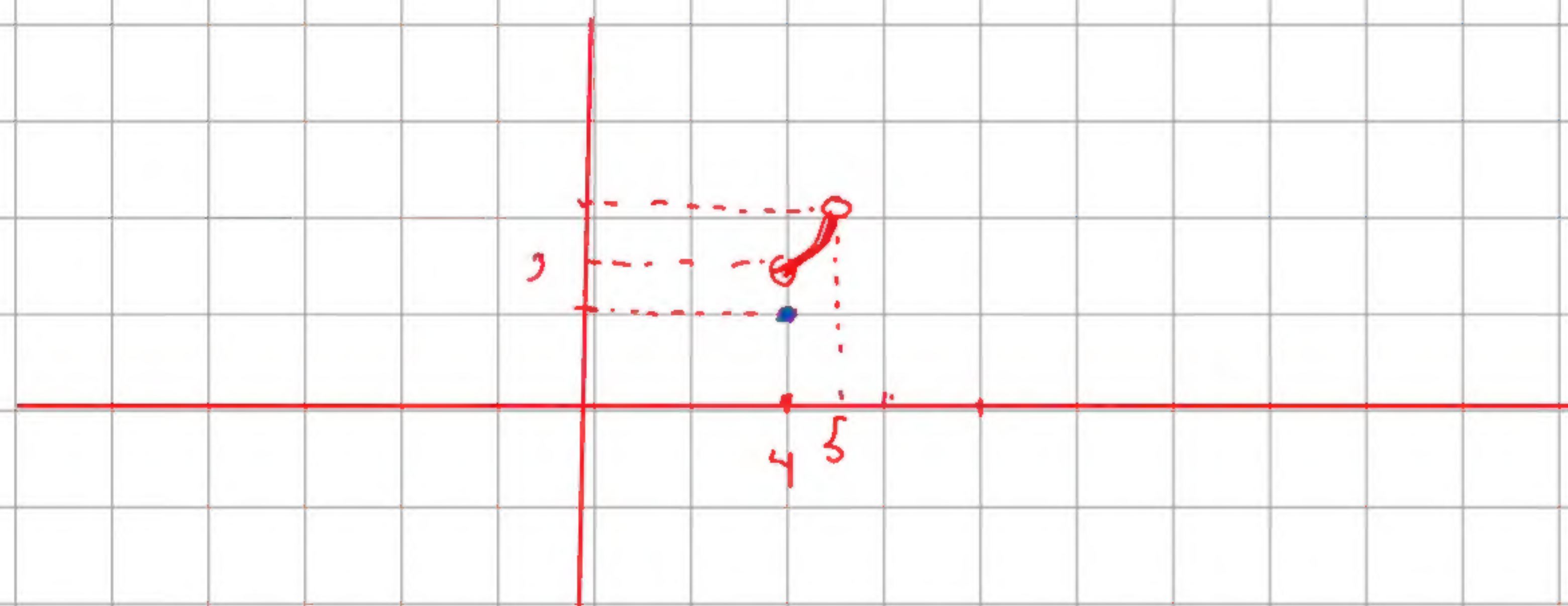
$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-4)}{\sqrt{\operatorname{sgn}([x-2])} - \sqrt{[|x-1|-3]}} + \log_{[x-2]}|x|$$

$$\operatorname{Dom} f = [4, 5)$$

$$x=4 \Rightarrow f(4) = 0 + \log_2 4 = 2$$

$$4 < x < 5 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{0}}} + \log_2 x = 1 + \log_2 x = \log_2 2x$$

$\operatorname{sgn}(\quad)$   
 máximo entero



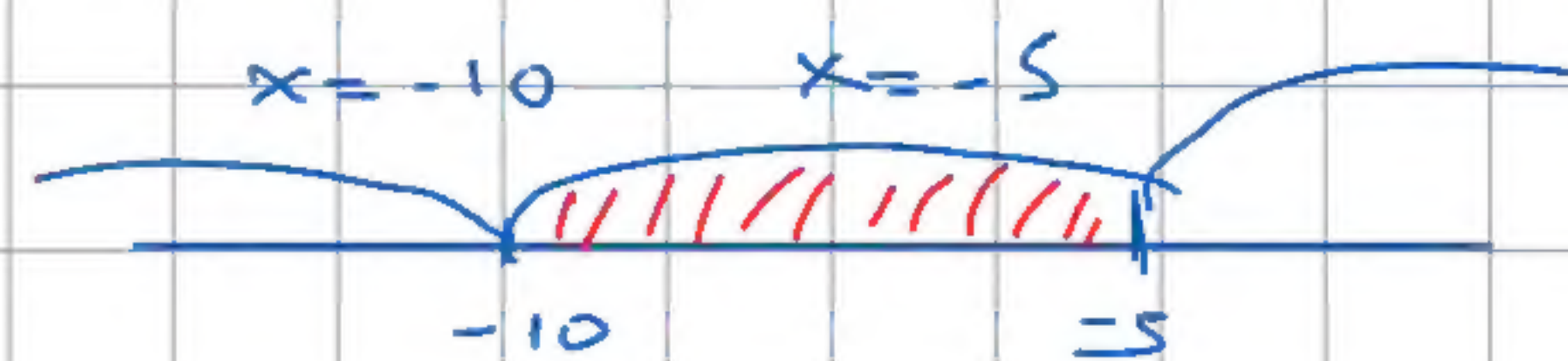


3) Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(|x+10| + |x+5|)}{x} & f_1 \quad -10 \leq x \leq -5 \\ \frac{x^2 - 2x + 5}{4} & f_2 \quad -5 < x \leq 1 \\ 1 - \sqrt{8 + 2x - x^2} & f_3 \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Determinar si  $f$  es inyectiva. Si no lo es, restringir el dominio, lo menos posible, de modo que sea inyectiva. Luego, halle  $f^*$ .

$$f_1(x) = \frac{4(|x+10| + |x+5|)}{x}$$



$$\text{Ran } f_1 = [-4, -2]$$

$$\textcircled{\text{II}}: -10 \leq x < -5$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{20}{x} & -10 \leq x < -5 \\ -4 & x = -5 \end{cases}$$

$$g_1(x) = \frac{20}{x}$$

$$g_1(x_1) = g_1(x_2) = \frac{20}{x_1} = \frac{20}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Ran } g_1 \cap \text{Ran } g_2 = \emptyset \quad \text{donde} \quad g_2(x) = -4 \quad x = -5$$

$$\text{Para } f_2: \frac{x^2 - 2x + 5}{4} = \frac{(x-1)^2 + 4}{4}$$

$$\text{Si } f_2(x_1) = f_2(x_2) = \frac{(x_1-1)^2 + 4}{4} = \frac{(x_2-1)^2 + 4}{4}$$

$$|(x_1-1)| = |(x_2-1)|, \text{ además, } -5 < x \leq 1 \Rightarrow -6 < x \leq 0$$

$$\Rightarrow -x_1 + 1 = -x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Ran } f_2 = [1, 10]$$

$$\text{Para } f_3 = \frac{1 - \sqrt{8 + 2x - x^2}}{1 - \sqrt{9 - (x-1)^2}} \quad 1 < x \leq 4$$

$$1 - \sqrt{9 - (x_1-1)^2} = 1 - \sqrt{9 - (x_2-1)^2}$$

$$\Rightarrow |x_1-1| = |x_2-1|$$

$$\Rightarrow x_1-1 = x_2-1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$0 < x-1 \leq 3$$

$$\text{Ran } f_3 = \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{Ran } f_1 = [-4, -2]$$

$$\text{Ran } f_2 = [1, 10]$$

$$\text{Ran } f_3 = \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4(|x+10| + |x+5|)}{x} \\ \frac{x^2 - 2x + 5}{4} \\ 1 - \sqrt{8 + 2x - x^2} \end{cases}$$

$$-10 \leq x \leq -5$$

$$-5 < x \leq 1$$

$$1 < x \leq 4$$

Si es inyectiva

$$f^* = \begin{cases} \frac{20}{x} & x \in [-4, -2] \\ -4 & x = -5 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



Idea  
sol 2

$$f^* = h \circ g$$

$$f^* = h(g(x))$$

$$\text{Dom } f^* = \text{Ran } f$$

$\mapsto \boxed{h}$

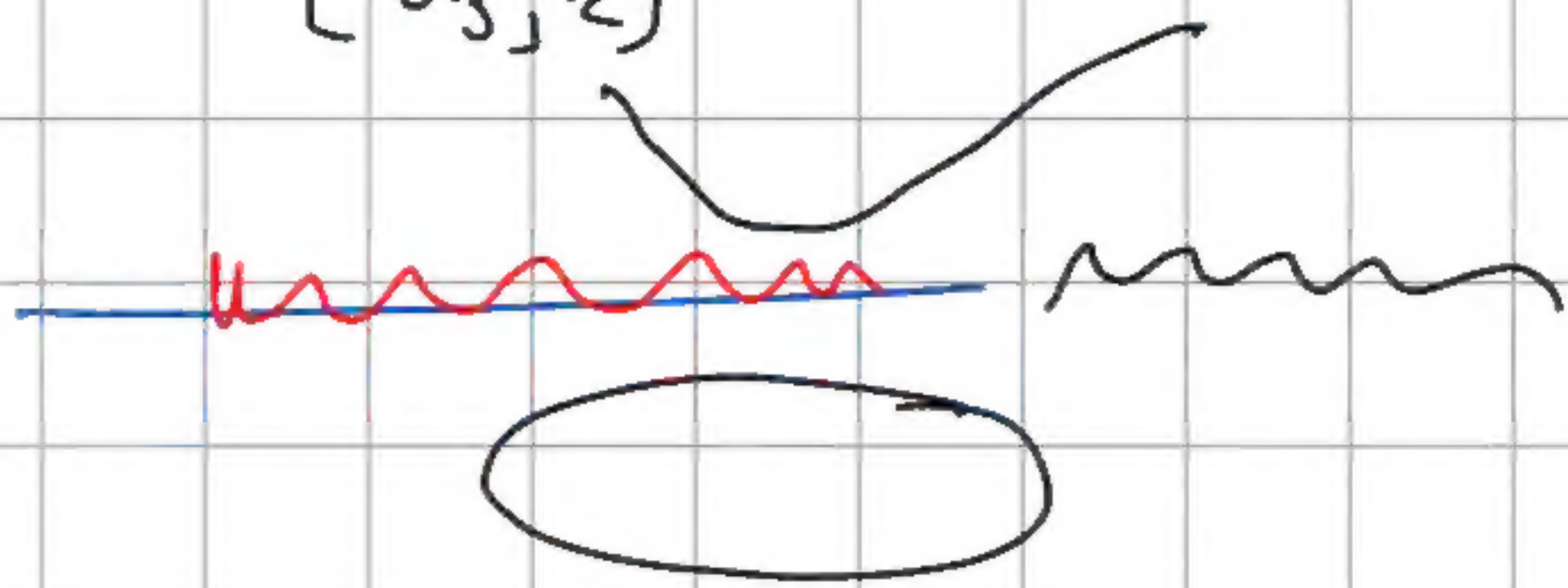
$\rightarrow$

composition  $\text{Dom } h(g(x))$

$x \in \text{Dom } g \wedge g(x) \in \text{Dom } h$

$\leftarrow$

$[\sqrt{3}, 2]$



$h(g(x))$

$f(x)$

$$f(\underline{x+2}) = \frac{1}{x}$$

$$f(\underline{x+2}) = \frac{1}{\underline{x+2} - 2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$f(y) = \frac{1}{y-2}$$



